UTN.BA
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES

ANÁLISIS MATEMÁTICO II
Examen Final 17/12/2024

APELLIDO DEL ALUMNO: .... NOMBRE: ....

CORRIGIÓ: .... REVISÓ: ....

T1	T2	P1	P2	P3	P4	CALIFICACIÓN

***Todas las respuestas deben ser justificadas adecuadamente para ser tenidas en cuenta*.**
No resolver el examen en lápiz. Duración del examen: 2 horas
Condición de aprobación (6 puntos): tres ejercicios correctamente resueltos (uno de T1 o T2 y dos de P1, P2, P3 o P4).

T1- a) **Defina** mínimo absoluto de un campo escalar $f\colon \boldsymbol{D} \subseteq R^2 \to R \ / \ z = f(x,y)$ en el conjunto ***D***.

b) **Demuestre** que el campo escalar $f(x,y) = (x-y)^4 + (y-1)^2$ presenta un mínimo absoluto en el punto $(1,1)$. ¿Es estricto o amplio? Justifique

T2- a) **Enuncie** el teorema de cambio de variable en el calculo de una integral doble, con las hipótesis correspondientes.

b) Dada $\int_{-1}^{0} dx \int_{-x}^{\sqrt{2-x^2}} dy$, **grafique** la región de integración, **plantee** la resolución en coordenadas polares, y **calcule** utilizando el sistema más conveniente. ¿Qué significado geométrico tiene el resultado obtenido?

P1- Dado $\bar{f}(x,y) = (3 - g(x)\,y \,, g'(x) - 2\,sen(x))$ **obtenga** la expresión de la función $g \in C^2(R)$ de modo que el trabajo de $\bar{f}$ a lo largo de toda curva simple, cerrada y suave sea nulo. Suponga $\bar{f}(0,1) = (3,0)$.

P2 **- Exprese,** mediante una integral doble, la integral curvilínea del campo vectorial $\bar{f} : R^3 \to R^3 \,/\, \bar{f}\,(x,y,z) = (\boldsymbol{g}\,(x,y,z) \,, \tfrac{1}{2} y^2 \,, x^2 - z^3)$ con $\boldsymbol{g} \in C^1(R^3)$ y sabiendo que $\boldsymbol{g}'_{\boldsymbol{y}}(x,y,z) = z + 6x - y$ **,** a lo largo de la curva cerrada **C ,** dada como intersección de la superficies $z = 8 - 6x \ \wedge \ z = 8 - x^2 - y^2$, indique el sentido que ha utilizado para recorrer la curva **C** .

P3 - **Halle** las direcciones de derivadas direccionales nula y máxima de $h = f \circ \bar{g}$ en (1,1) si $\bar{g}(x,y) = (x^2 y \,, x - y^2)$ y $z = f(u,v)$ está definida implícitamente por la ecuación $z - u^2 + v^2 + Ln\,(v + z) = 0$.

P4- Dado el cuerpo **H** definido por: $z \le 9 - x^2$, $x + y \le 5$, incluido en el primer octante , **proporcione dos** integrales múltiples distintas que permitan calcular su volumen , proyectando **H** sobre distintos planos coordenados .

(resuelto por Sylvina)

AM2	Final UTN BA	1/3 17-12-24

T1 a) Definir mínimo absoluto de un campo escalar $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ / $z = f(x,y)$ en el conjunto D

Se dice que $f(x_0,y_0)$ es mínimo absoluto de f si:

$$f(x_0,y_0) \geq f(x,y) \ \forall (x,y) \in D$$

b) Demostrar que el campo escalar $f(x,y) = (x-y)^4 + (y-1)^2$ presenta mínimo absoluto en $(1,1)$.

¿Es estricto o amplio? justificar

$$f(x,y) = \underbrace{(x-y)^4}_{\geq 0} + \underbrace{(y-1)^2}_{\geq 0} \to f(x,y) \geq 0 \ \forall (x,y) \in D$$

$$f(1,1) = (1-1)^4 + (1-1) = 0 \to f(1,1) = 0 \Big\} \ \boxed{f(1,1) \text{ es mínimo absoluto}}$$

T2 a) Enunciar el teorema de cambio de variable en el cálculo de una integral doble, con las hipótesis correspondientes

Sean D y D^* dos regiones elementales de $\mathbb{R}^2$

$T: D \to D^*$ una transformación C^1 inyectiva

↳ $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$

Entonces:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(T(u,v))\,|J|\,du\,dv$$

con $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \to |J| = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \dfrac{1}{\begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix}}$

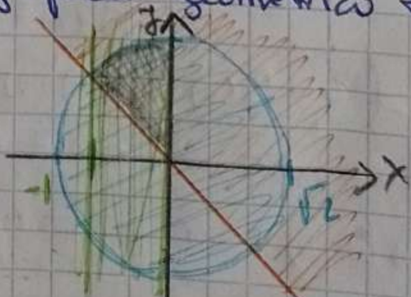
b) Dada $\int_{-1}^{0} dx \int_{-x}^{\sqrt{2-x^2}} dy$, graficar la región de integración, plantear la resolución en coord. polares y calcular utilizando el sistema más conveniente. ¿Qué significado geométrico tiene el res. obtenido?

$\boxed{-1 \leq x \leq 0}$, $\underbrace{-x \leq y}_{y \geq -x} \leq \sqrt{2-x^2}$

$y \geq -x$

$y^2 \leq 2 - x^2$

$x^2 + y^2 \leq 2$



$\begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = r\,\text{sen}(t) \end{cases}$

$0 \leq r \leq \sqrt{2}$

$\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{3}{4}\pi$

(resuelto por Sylvina)

$$I = \int_{-1}^{0} dx \int_{-x}^{\sqrt{2-x^2}} dy \overset{(c.v)}{=} \int_{\pi/2}^{\frac{3}{4}\pi} dt \int_{0}^{\sqrt{2}} r \, dr \overset{Jac}{=} \left(\frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{r^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}^2}{2} - 0\right) = \boxed{\frac{\pi}{4} = \text{Area de } D}$$

(P1) Dado $\bar{f}(x,y) = \left(3 - g(x)\, y \,,\, g'(x) - 2\,\text{sen}(x)\right)$ obtener la expresión de la función $g \in C^2(\mathbb{R})$ de modo que el trabajo de $\bar{f}$ a lo largo de toda curva simple, cerrada y suave sea nulo.

Suponer $\bar{f}(0,1) = (3,0)$

Voy a hallar g tal que $\bar{f}$ sea campo conservativo

$dom(\bar{f}) = \mathbb{R}^2$ ✓ $\bar{f} = (P,Q) \in C^1$ ✓ $\rightarrow$ Hallo g / $P'_y = Q'_x$

$$\begin{cases} P'_y = -g(x) \\ Q'_x = g''(x) - 2\cos(x) \end{cases} \qquad -g(x) = g''(x) - 2\cos(x)$$

uso $\boxed{y = g(x)}$

$$g''(x) + g(x) = 2\cos(x)$$

raíces complejas $\qquad A, B \in \mathbb{R}$

SH) $r^2 + 1 = 0 \rightarrow r_1 = i \,,\, r_2 = -i \rightarrow \boxed{y_H = A\cos(x) + B\,\text{sen}(x)}$

SP) $y_p = C\, x\, \text{sen}(x) + D\, x \cos(x)$

$y'_p = C\,\text{sen}(x) + Cx\cos(x) + D\cos(x) + Dx(-\text{sen}(x)) = \overbrace{\cos(x)(Cx + D) + \text{sen}(x)(C - Dx)}^{y'}$

$y'' = -\text{sen}(x)(Cx+D) + \cos(x)\, C + \cos(x)(C - Dx) + \text{sen}(x)(-D)$

$y'' + y = 2\cos(x)$

$-\text{sen}(x)(Cx+D) + C\cos(x) + \cos(x)(C - Dx) + \text{sen}(x)(-D) + Cx\,\text{sen}(x) + Dx\cos(x) = 2\cos(x)$

$\text{sen}(x)\underbrace{(-\cancel{Cx} - D - D + \cancel{Cx})}_{0 = -2D} + \cos(x)\underbrace{(C + C - \cancel{Dx} + \cancel{Dx})}_{2 = 2C} = 2\cos(x) + 0\,\text{sen}(x)$

$\boxed{D = 0}$ $\qquad \boxed{C = 1}$

$\boxed{y_p = x\,\text{sen}(x)}$ $\qquad y_G = \boxed{A\cos(x) + B\,\text{sen}(x) + x\,\text{sen}(x) = g(x)}$

$g'(x) = -A\,\text{sen}(x) + B\cos(x) + \text{sen}(x) + x\cos(x)$

$\bar{f}(0,1) = (3,0) = (3 - g(0) \cdot 1 \,,\, g'(0) - 2\,\text{sen}(0)) \rightarrow 3 - g(0) = 3 \rightarrow \boxed{g(0) = 0}$

$\rightarrow \boxed{g'(0) = 0}$

$g(0) = A\cos(0) + B\,\text{sen}(0) + 0\,\text{sen}(0) = \boxed{0 = A}$

$g'(0) = -A\,\text{sen}(0) + B\cos(0) + \text{sen}(0) + 0\cos(0) = \boxed{0 = B}$

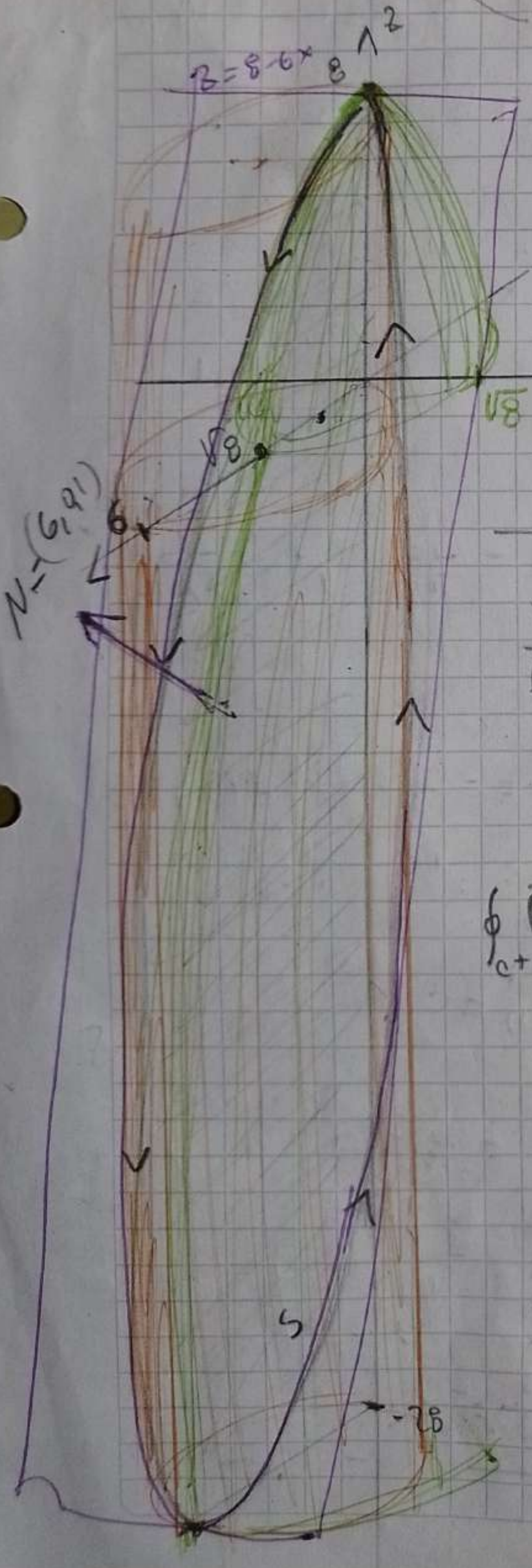
$$\boxed{g(x) = x\,\text{sen}(x)}$$

(resuelto por Sylvina)

AM2	Final UTN BA	2/3 17-12-24

(P2) Expresar, mediante una integral doble, la integral curvilíneas del campo vectorial $\bar{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 / \bar{F}_{(x,y,z)} = (g(x,y,z), \frac{1}{2}y^2, x^2 - z^3)$ con $g \in C^1(\mathbb{R}^3)$ y sabiendo que $g'_y(x,y,z) = z + 6x - y$, a lo largo de la curva cerrada C, dada como intersección de las superficies:

$\boxed{z = 8 - 6x} \wedge \boxed{z = 8 - x^2 - y^2}$. Indicar el sentido que ha utilizado para recorrer la curva C.



en $z = 0 \to x = 8/6$

$$\begin{cases} z = 8 - 6x \\ z = 8 - (x^2 + y^2) \end{cases}$$

$$6x = x^2 + y^2$$

$$(x-3)^2 + y^2 = 9$$

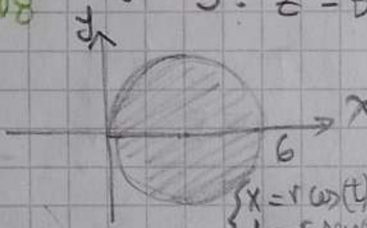
$S: z = 8 - 6x$ con $(x-3)^2 + y^2 \leq 9$

C es borde de S

S sup. orientable

$\bar{F} \in C^1$

$S: z - 8 + 6x \rightarrow \boxed{N_S = (6,0,1)}$



$$\begin{cases} x = r\cos(t) + 3 \\ y = r\,\text{sen}(t) \end{cases}$$

Se cumplen las hip. T Stokes

$$\oint_C \bar{F}\,d\bar{l} = \iint_S \text{rot}\,\bar{F}\,d\bar{S}$$

$$\bar{F} = (P, Q, R) \to \text{rot}(\bar{F}) = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y) =$$

$$= (0 - 0, g'_z - 2x, 0 - g'_y) = (0, g'_z - 2x, -z - 6x + y)$$

$$\oint_{C^+} \bar{F}\,d\bar{l} = \iint_S \text{rot}(\bar{F})\,\breve{n}\,ds = \iint_{S_{xy}} \text{rot}(\bar{F}) \cdot m\,dx\,dy =$$

$$= \iint_{S_{xy}} (0, g'_z - 2x, -z - 6x + y)(6, 0, 1)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_{S_{xy}} -\underset{z = 8 - 6x}{z} - 6x + y\,dx\,dy = \iint_{S_{xy}} -8 + \cancel{6x} - \cancel{6x} + y\,dx\,dy$$

$$= \iint_{S_{xy}} y - 8\,dx\,dy \overset{\text{C.V.}}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^3 r \cdot (r\,\text{sen}(t) - 8)\,dr\,dt$$

$$\boxed{\oint_{C^+} \bar{F}\,d\bar{l} = \int_0^{2\pi} \int_0^3 r^2\,\text{sen}(t) - 8r\,dr\,dt}$$

(resuelto por Sylvina)

(P3) Hallar las direcciones de derivadas direccionales nulas y máxima de $h = f\circ\bar{g}$ en $(1,1)$ si $\bar{g}(x,y) = (x^2 y\,,\, x-y^2)$ y $z = f(u,v)$ está definida implícitamente por $z - u^2 + v^2 + \ln(v+z) = 0$

$x\ \text{TFI} \to f \in C^1$, $\bar{g}$ tiene componentes polinómicas
$\bar{g} \in C^1$

h es composición de func. $C^1 \Rightarrow$ $\boxed{h \text{ es diferenciable}}$
h dif

h dif $:\to \frac{\partial h}{\partial \breve{v}}(1,1)\Big|_{max}$ se da en la dirección del gradiente de $h_{(1,1)}$

$\breve{v} = (a,b)$

$\to \frac{\partial h}{\partial \breve{v}}(1,1) = \nabla h_{(1,1)} \cdot \breve{v} = h'_{x\,(1,1)} \cdot a + h'_{y\,(1,1)}\, b$

$\to Dh_{(1,1)} = Df_{(\bar{g}(1,1))} \cdot D\bar{g}_{(1,1)}$ ⊛

$$\bar{g}_{(x,y)} = (x^2 y\,,\, x-y^2) \to D\bar{g}_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ 1 & -2y \end{pmatrix} \to \boxed{D\bar{g}_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\bar{g}_{(1,1)} = (1,0)} \to Df_{(\bar{g}(1,1))} = \boxed{Df_{(1,0)}}$$

$$G(x,y,z) = z - u^2 + v^2 + \ln(v+z) \xrightarrow{\text{TFI}} z'_u = \frac{-G'_u}{G'_z}\ ,\ z'_v = \frac{-G'_v}{G'_z}$$

hallo z: $z_0 - 1^2 + 0^2 + \ln(0+z_0) = 0 \to \boxed{z_0 = 1}$
$(1,0,z_0)$
$\to P = (1,0,1)$ $\qquad z = f(u,v)$

$$\left.\begin{aligned} G'_u &= -2u &\to G'_u(1,0,1) &= -2 \\ G'_v &= 2v + \frac{1}{v+z} &\to G'_v(1,0,1) &= 1 \\ G'_z &= 1 + \frac{1}{v+z} &\to G'_z(1,0,1) &= 2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} z'_u &= -\frac{-2}{2} \\ z'_v &= -\frac{1}{2} \end{aligned} \left.\right\} \boxed{\begin{aligned} f'_{u\,(1,0)} &= 1 \\ f'_{v\,(1,0)} &= -1/2 \end{aligned}}$$

⊛ $Dh_{(1,1)} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix} \to \boxed{h'_{x(1,1)} = \frac{3}{2} \qquad h'_{y(1,1)} = 2}$

$\boxed{\text{direc. deriv. NULA}}$: $h'_{x(1,1)} \cdot a + h'_{y(1,1)}\, b = 0 = \frac{3}{2}a + 2b \Rightarrow 3a = -4b$
$a = -\frac{4}{3}b$

$a^2 + b^2 = 1 = \left(-\frac{4}{3}b\right)^2 + b^2 = \frac{16}{9}b^2 + b^2 = \frac{25}{9}b^2 = 1 \to \boxed{|b| = \frac{3}{5}}$

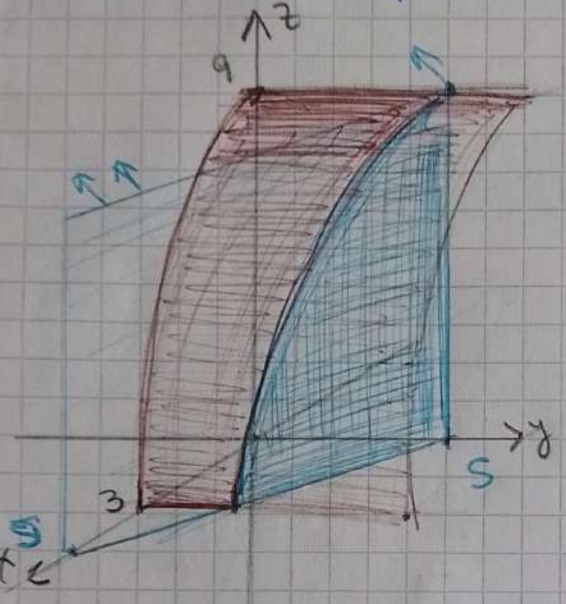
$\frac{\partial h}{\partial v}(1,1) = 0 \to \boxed{\breve{v}_1 = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)}$ $\boxed{\breve{v}_2 = \left(-4/5\,,\, 3/5\right)}$ der. NULA

$\frac{\partial h}{\partial \breve{v}}(1,1)\Big|_{max} \to \breve{v} = \frac{(3/2\,,\, 2)}{\sqrt{(3/2)^2 + 2^2}} \to \boxed{\breve{v}_{max} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)}$

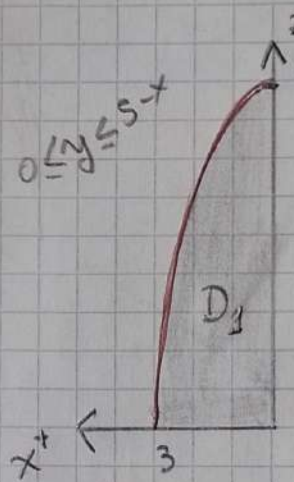
(resuelto por Sylvina)

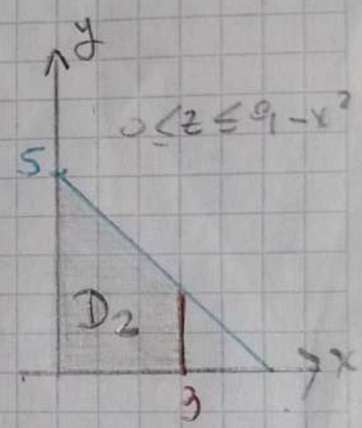
AM 2	Final UTN BA	3/3 17-12-24

(P4) Dado el cuerpo H definido por $\boxed{z \le 9 - x^2}$, $\boxed{x + y \le 5}$ incluido en el 1° octante, proporcionar DOS integrales múltiples distintas que permitan calcular su volumen, proyectando H sobre distintos planos coordenados



No conviene proyectar en el plano yz porque tiene "dos techos"





(D1) $$Vol_H = \int_0^3 \int_0^{9-x^2} \int_0^{5-x} dy\, dz\, dx = \int_0^3 \int_0^{5-x} \int_0^{9-x^2} dz\, dy\, dx$$ (D2)